SISTEMI LINEARI DI DUE EQUAZIONI IN DUE INCOGNITE:

INTRODUZIONE: Abbiamo visto che le equazioni di primo grado ci consentono di risolvere molti problemi; ma in alcuni problemi gli elementi da determinare sono più di uno.

Esempio: un test è formato da domande e problemi. Paolo risponde esattamente a 7 domande, svolge correttamente 3 problemi e ottiene 29 punti. Francesca risponde esattamente a 10 domande, svolge correttamente 2 problemi e ottiene 30 punti.
Quanti punti vale una domanda e quanti un problema?

Indichiamo con x il punteggio di una domanda;
Indichiamo con y il punteggio di un problema;

Tipo di quesito	Domande	Problemi	totale	equazione
Punteggio per quesito	x	y		
Punteggio di Paolo	7x	3y	29	**7x+3y = 29**
Punteggio di Francesca	10x	2y	30	**10x + 2y = 30**

Il problema viene risolto risolvendo quello che definiamo sistema lineare di due equazioni in due incognite: $\begin{cases} 7x+3y=29 \\ 10x+2y=30 \end{cases}$

DEFINIZIONE: un sistema di equazioni è un insieme di equazioni tutte nelle stesse incognite . Le **soluzioni del sistema** sono le **soluzioni comuni** a tutte le equazioni che lo compongono. Per indicare un sistema, si scrivono le equazioni in colonna, racchiuse da una parentesi graffa: esempio $\begin{cases} 5x - 4y = 7 \\ 2x + 3y = 11 \end{cases}$

GRADO DI UN SISTEMA:

Il **grado di un sistema di equazioni** algebriche **intere** è il **prodotto dei gradi** delle singole equazioni che lo compongono.

Un sistema di **primo grado** viene anche detto **sistema lineare**.

Esempio 1: $\begin{cases} 5x - 4y = 7 \\ 2x + 3y = 11 \end{cases}$

Il sistema 1 è di 1° grado, poiché formato da due equazioni di **primo grado**, quindi il Prodotto è: 1 · 1 = 1

Esempio 2: $\begin{cases} 3x^2 - 4y = 7 \\ 2x + 5y^3 = 13 \end{cases}$

Il sistema 2 è di 6° grado, poiché formato da una equazione di **II grado** (la prima) e da una di **terzo grado**(la seconda), quindi il Prodotto è: 2· 3 = 6.

Risolvere un sistema lineare di due equazioni nelle due incognite x e y, significa trovare una **coppia di valori** che sostituiti ad x e a y, verificano tutte e due le equazioni del sistema, cioè le rendono uguaglianze vere.

Esempio: La coppia **ordinata** di valori (1; 2) è soluzione del sistema di equazioni

$$\begin{cases} x + y = 3 & \leftarrow \textit{prima equazione del sistema} \\ 2x + y = 4 & \leftarrow \textit{seconda equazione del sistema} \end{cases}$$

perché **è soluzione di tutte e due** le equazioni del sistema. Infatti:
sostituendo, **nella prima equazione** alla x il valore 1 e alla y il valore 2, otteniamo un' uguaglianza vera: 1 + 2 = 3 e quindi **3 = 3** !
Anche, nella **seconda equazione**, sostituendo alla x il valore 1 e alla y il valore 2, otteniamo un'uguaglianza vera:
2.(1)+ 2 = 4, cioè 2 + 2 = 4 e quindi **4 = 4** !

Esistono quattro metodi algebrici, per trovarne la soluzione: **Metodo di sostituzione, metodo di confronto**, **metodo di riduzione, metodo di Cramer** .

- **Metodo di Sostituzione:**

Dobbiamo risolvere il sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ 3x - y = 7 \end{cases}$$

In entrambe le equazioni la x e la y devono avere lo stesso valore, allora **posso ricavare da una delle due equazioni il valore della x** (o della y) **e sostituirla alla x** (alla y) nell' altra equazione.

In questo modo ottengo un'equazione in una sola incognita che so risolvere.
Ricavare x od y e' indifferente e dipende dal sistema: nel nostro caso conviene **ricavare la y** dalla **seconda** equazione e **sostituirla** nella prima:

Ricavo la y dalla seconda equazione, lasciando il termine in y al primo membro e portando 3x al secondo membro (cambiandolo di segno):

$$\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ - y = 7 - 3x \end{cases} \quad \text{cambio di segno} \longrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ y = - 7 + 3x \end{cases}$$

Sostituisco il valore della y trovato: **- 7 + 3x** nella prima equazione al posto della y. Senza riscrivere la seconda equazione si mette una linea per indicare che c'e':

$$\begin{cases} 2x + 3(- 7 + 3x) = 12 \\ \text{-------------------------} \end{cases} \quad \text{eseguo i calcoli} \quad \begin{cases} 2x - 21 + 9x = 12 \\ \text{-----------------------} \end{cases}$$

porto il numero – **21** al secondo membro $\longrightarrow$ $\begin{cases} 2x + 9x = 12 + 21 \\ \text{--------------------} \end{cases}$

Sommo i termini simili ⟶ $\begin{cases} 11x = 33 \\ \text{-----------------------} \end{cases}$

ricavo la x dividendo per 11 prima e dopo l'uguale $\begin{cases} \dfrac{11x}{11} = \dfrac{33}{11} \\ \text{-------------} \end{cases}$

trovo la soluzione per la x e scrivo la seconda equazione $\begin{cases} x = 3 \\ y = -7 + 3x \end{cases}$

Nell'equazione di sotto y = - 7 + 2x sostituisco al posto della x il valore trovato **3:** ⟶ $\begin{cases} x = 3 \\ y = -7 + 3(3) = -7 + 9 = 2 \end{cases}$ ⟶ $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$

Il sistema lineare ammette come soluzione la **coppia ordinata** di valori **(3;2).**

- **Metodo del confronto:** Il metodo del confronto consiste nel ricavare la stessa incognita nelle due equazioni, uguagliare le espressioni trovate e risolvere **l'equazione di primo grado in un'incognita** che così si ottiene.

Questo metodo è particolarmente utile quando le equazioni del sistema sono in forma esplicita, cioè del tipo: y = mx + q.

Esempio: Risolviamo il seguente sistema con il **metodo del confronto:**

$\begin{cases} 2x - y = -1 \\ x + y = 4 \end{cases}$ **esplicito le due equazioni rispetto alla y** , cioè, applicando la legge del trasporto (ovvero i principi di equivalenza delle equazioni) al primo membro deve rimanere solo " **+ y" .** Ottengo:

$\begin{cases} -y = -2x - 1 \\ y = -x + 4 \end{cases}$ nella prima equazione la y la rendo positiva cambiando il segno a tutti i termini:

$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = -x + 4 \end{cases}$ **(*)**

Uguagliamo, ponendole a confronto, le due espressioni di y ottenute e risolviamo l'equazione di primo grado in x così ricavata:

2x + 1 = - x + 4 ⟶ **2x + x = 4 – 1** ⟶ **3x = 3** ⟶ **x = 1**

Sostituendo il valore della x (**cioè 1**)in una delle equazioni del sistema **(*)**, per esempio nella prima, otteniamo:
y = 2x + 1 = 2(1) + 1 = 3.
La soluzione del sistema è (1;3).

METODO DI RIDUZIONE (o metodo di addizione e sottrazione)

Questo metodo consiste nel sommare o sottrarre membro a membro le due equazioni del sistema e si ottiene un'equazione equivalente al sistema in cui un'incognita viene eliminata.

Questo metodo è utile solamente quando sommando o sottraendo i termini corrispondenti delle due equazioni si ottiene un'equazione in una sola incognita.

Esempio:

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 3x - y = 7 \end{cases}$$

osservando che nella prima equazione c'è $+y$ e nella seconda equazione c'è il termine opposto $-y$, **sommiamo termine a termine** le due equazioni e si ottiene un' equazione nella sola incognita:

$$5x + 0 = 10 \longrightarrow 5x = 10 \longrightarrow x = \frac{10}{5} = 2$$

Esercizio 1): Risolvere i seguenti sistemi con il metodo di sostituzione e/o di confronto:

1) $\begin{cases} x - y = 3 \\ x + y = 9 \end{cases}$ (6;3) ; 2) $\begin{cases} 2x - 5y = 7 \\ x - 3y = 1 \end{cases}$ (16; 5) ; 3) $\begin{cases} 5x + y = 20 \\ 5x + 7y = 20 \end{cases}$ (4;0)

4) $\begin{cases} 2x - y = 7 \\ 4x - 3y = 4 \end{cases}$ (17/2; 10) 5) $\begin{cases} 5x - 3y = 12 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$ (3;1) 6) $\begin{cases} 3(x-1) + 2(y+1) - 6 = 5 \\ 2(x+1) - 3(y-1) = 0 \end{cases}$ (2;3)

Esercizio 2: risolvi i seguenti sistemi con il metodo di riduzione:

1) $\begin{cases} x - y = 3 \\ x + y = 9 \end{cases}$ (6;3) 2) $\begin{cases} 3x + 2y = 6 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$ (1, 3/2)

3) $\begin{cases} 5x - 6y = 11 \\ x + 6y = 7 \end{cases}$ (3, 2/3)

- **Metodo di Cramer:**

Dato un sistema lineare in forma normale $\begin{cases} \boldsymbol{a}x + \boldsymbol{b}y = \mathbf{c} \\ \boldsymbol{a'}x + \boldsymbol{b'}y = \mathbf{c'} \end{cases}$

Dove a, a', b, b', c, c′ **:**
a è il coefficiente della x nella I equazione; a' è il coefficiente della x nella II equazione;
b è il coefficiente della y nella I equazione; b' è il coefficiente della y nella II equazione;
c e c′ sono i termini noti.
Per risolvere il sistema, mediante il metodo di Cramer, bisogna calcolare tre numeri, detti determinanti:

- Il **"Determinante del sistema"** è: $\mathbf{D} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{a'} & \boldsymbol{b'} \end{vmatrix} = ab' - ba'$

Si costruisce una tabella in cui: nella **prima colonna** mettiamo i **coefficienti della x**;
nella **seconda colonna** mettiamo i **coefficienti della y**;
E calcoliamo la **differenza tra** il prodotto tra i numeri della **diagonale principale** (indicata dalla freccia) e il prodotto dei numeri della diagonale secondaria.

- Il **"Determinante dell'incognita x"** è: $\mathbf{Dx} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{c} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c'} & \boldsymbol{b'} \end{vmatrix} = cb' - bc'$

Si costruisce una tabella in cui: nella **prima colonna** mettiamo **i termini noti**;
nella **seconda colonna** mettiamo i **coefficienti della y**;
Dx sarà dato dalla **differenza tra** il prodotto dei numeri della **diagonale principale** e il prodotto dei numeri della diagonale secondaria.

- Il **"Determinante dell'incognita y"** è: $\mathbf{Dy} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{a'} & \boldsymbol{c'} \end{vmatrix} = ac' - ca'$

Si costruisce una tabella in cui: nella **prima colonna** mettiamo i **coefficienti della x**;
nella **seconda colonna** mettiamo **i termini noti**;
Dy sarà dato dalla **differenza tra** il prodotto dei numeri della **diagonale principale** e il prodotto dei numeri della diagonale secondaria.

Allora, i valori di x e y, saranno dati dai seguenti rapporti: $\mathbf{x} = \dfrac{Dx}{D}$ e $\mathbf{y} = \dfrac{Dy}{D}$ **;**
Il sistema ammette soluzioni solo nel caso in cui il determinante del sistema D ≠ 0.

Esempio: Risolvere con il **metodo di Cramer** il sistema: $\begin{cases} \mathbf{2x + 3y = 12} \\ \mathbf{3x - y = 7} \end{cases}$

In questo caso **i coefficienti della x** sono : **2 e 3**; i **coefficienti della y** sono: **3** e **– 1**;
i termini noti sono **12** e **7** .

Quindi, **il determinante del sistema** è: $\mathbf{D} = \begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-1} \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) - 3 \cdot 3 = -2 - 9 = \mathbf{-11}$

Il **determinante della x** è: **Dx** = $\begin{vmatrix} \mathbf{12} & \mathbf{3} \\ \mathbf{7} & \mathbf{-1} \end{vmatrix}$ = 12· (- 1) − 3·7 = − 12 – 21 = **− 33**

Il **determinante della y** è **Dy** = $\begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{12} \\ \mathbf{3} & \mathbf{7} \end{vmatrix}$ = 2· (7) − 3· 12 = 14 – 36 = **− 22**

x = $\dfrac{Dx}{D} = \dfrac{-33}{-11} = 3$ e **y** = $\dfrac{Dy}{D} = \dfrac{-22}{-11} = 2.$

La soluzione del sistema è la coppia ordinata di valori (3; 2) ed è l'unica soluzione del sistema.

Esercizio 3) risolvi i sistemi dell'esercizio 1 con il metodo di Cramer;

Esercizio 4) Risolvi i seguenti sistemi con il metodo di Cramer, dopo averli ridotti in forma normale (sono equazioni frazionarie da ridurre in forma intera calcolando il m.c.m.):

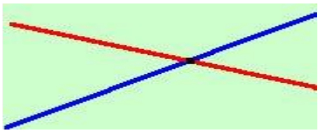
1) $\begin{cases} \dfrac{1}{2}x - \dfrac{2}{3}y = \dfrac{1}{6} \\ \dfrac{1}{4}x = \dfrac{1}{5}y - \dfrac{3}{10} \end{cases}$;

SISTEMI DETERMINATI, IMPOSSIBILI. INDETERMINATI E SIGNIFICATO GEOMETRICO:

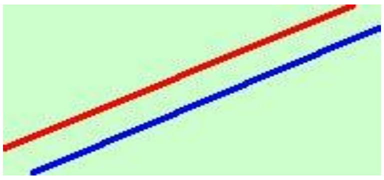
CRITERIO DEI RAPPORTI PER STABILIRE SE UN SISTEMA È DETERMINATO, INDETERMINATO, IMPOSSIBILE:

Dato un sistema lineare $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ dove a', b' , c' sono diversi da zero, valgono i seguenti fatti:

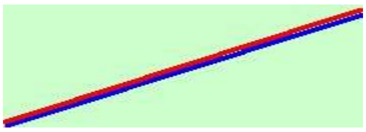
- se $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ il sistema è **determinato**, cioè il sistema ammette soluzione e le rette rappresentate dalle due equazioni del sistema si incontrano in un punto e si dicono **incidenti:**



- se $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ il sistema è **impossibile,** cioè non ammette soluzioni e le rette rappresentate dalle due equazioni del sistema sono **parallele**, ossia non hanno punti in comune:



- se $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ il sistema è **indeterminato,** cioè ammette infinite soluzioni e le rette rappresentate dalle due equazioni del sistema **coincidono:**



Esempio: Dato il sistema lineare il forma normale: $\begin{cases} 10y-2x=8 \\ -2x+2y=5 \end{cases}$ esso è determinato perchè risulta: $\frac{a}{a'} = \frac{10}{-2} = -5$ che è diverso da $\frac{b}{b'} = \frac{-2}{2} = -1$, quindi $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$.

Esercizio 5) Stabilisci, senza risolverli, utilizzando il criterio dei rapporti, se i seguenti sistemi sono:

a) $\begin{cases} 3x+2y=6 \\ x+2y=4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x+2y=6 \\ 6x+4y=12 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 10x-2y=8 \\ 5x-y=4 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 10y-2x=8 \\ -x+2y=2 \end{cases}$